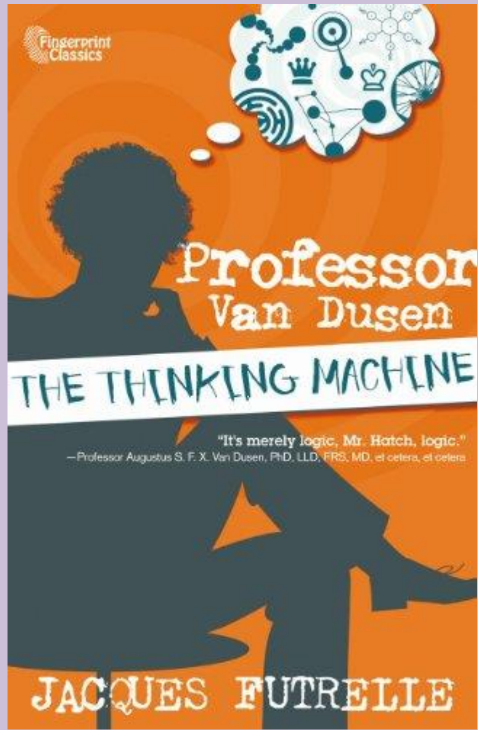
LOGICA, SIMBOLI E REALTA'

Carlo Toffalori (Camerino)

Siena, 7 aprile 2019

- Aristotele: la logica come fondamento rigoroso e oggettivo di ogni scienza
- L’utopia di Gottfried W. Leibniz, il *“calculus ratiocinator”*
- La logica diventa matematica: l’algebra di George Boole
- L’aritmetica e la matematica diventano logica (Gottlob Frege)? Un’intrusione inaccettabile?

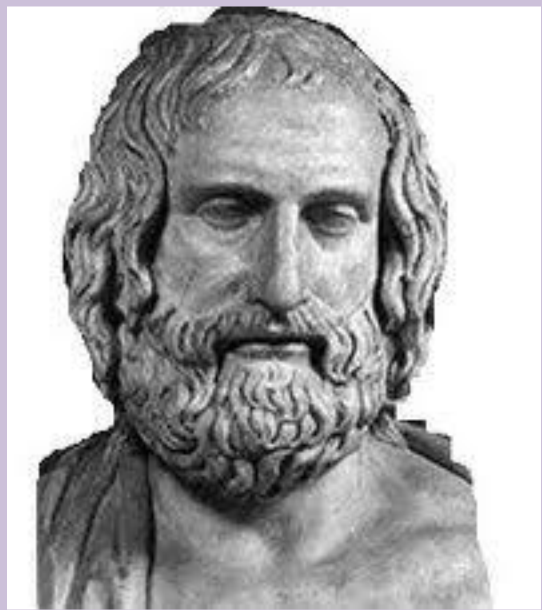


Entusiasmi ingenui ed eccessivi per la logica… Jacques Futrelle, *La macchina Pensante*, primi anni del 1900: il professor Augustus Van Dusen

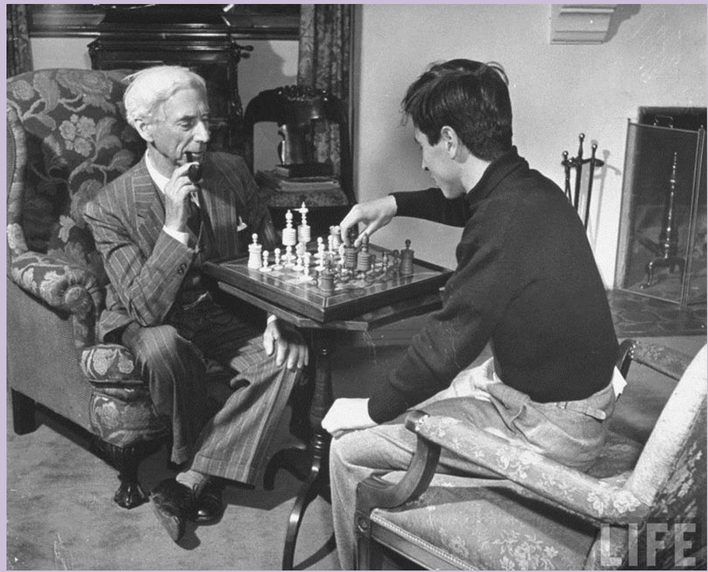
“La logica risolve ogni problema – non la maggior parte dei problemi, ma tutti i problemi. E’ inevitabile, così come è inevitabile che ***due più due faccia quattro, non solo qualche volta, ma ogni volta****”.*

D’altra parte, dilemmi logici apparentemente irrisolvibili

Il ***paradosso di Epimenide***: chi afferma di mentire mente se e solo se dice la verità.



La versione giudiziaria di Aulo Gellio, *Notti attiche*: Protagora, *“il più acuto dei sofisti”*, contro l’allievo Evatlo, una causa vinta se e solo se persa?



Una versione matematica: il ***paradosso di Bertrand Russell***

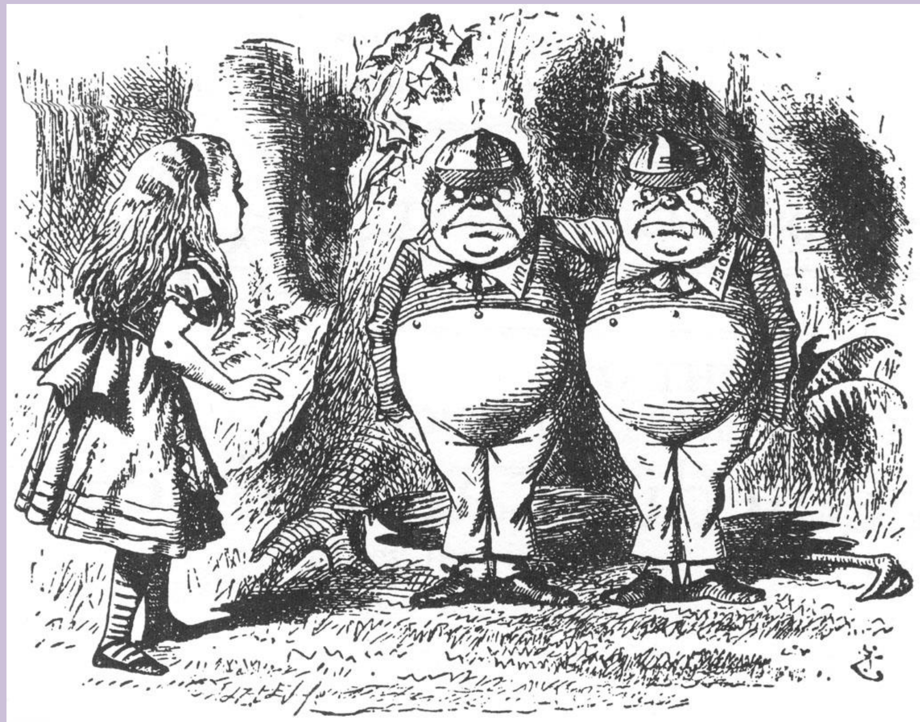
- L'***insieme*** di tutti gli insiemi si appartiene, perché è un insieme
- L'insieme vuoto non si appartiene, perché è vuoto.

Consideriamo allora l'insieme U degli insiemi che non si appartengono. Deduciamo che

$$U \in U \iff U \notin U.$$

(Ma che cosa è, o non è, un ***insieme***?)

La logica secondo Charles Dogdson = Lewis Carroll e i racconti di Alice



I sillogismi di Tweddledee (e Tweddledum)

“If it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic”.

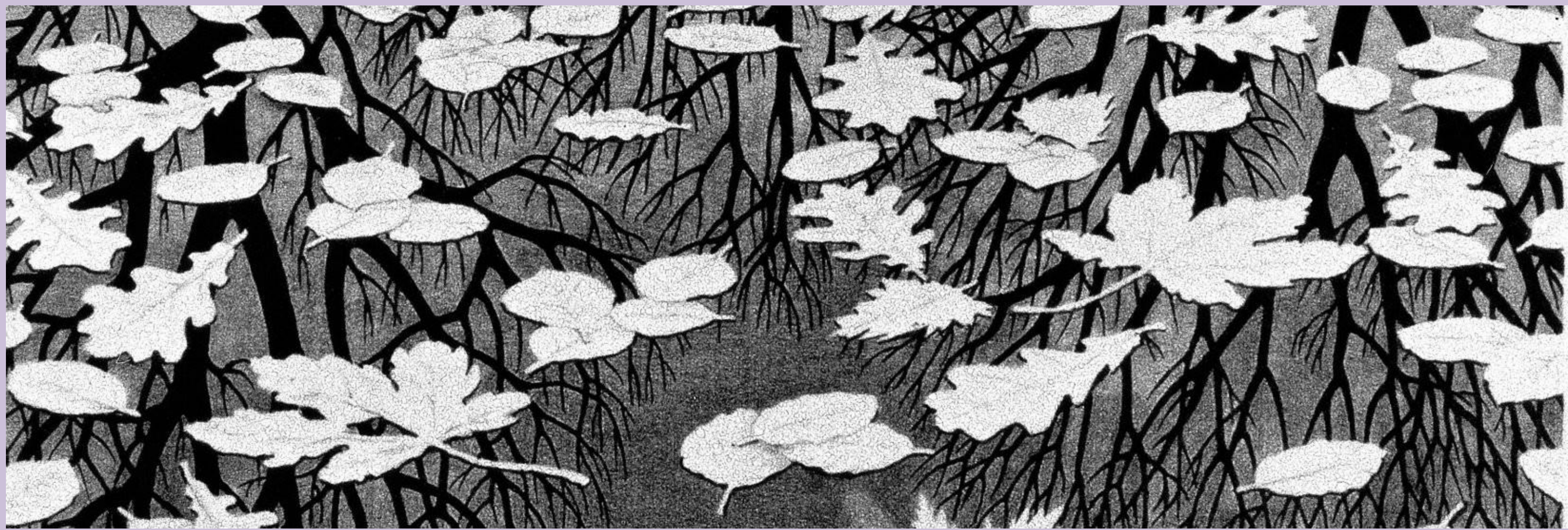
A proposito di Carroll: Gilbert K. Chesterton, *Difesa del non senso*, una doppia personalità

- Charles Dogdson, docente di matematica *“serio e convenzionale”*, *“assai pedante e con qualcosa di filisteo”*
- incline, come Lewis Carroll, ad abbandonare questa veste rispettabile per rifugiarsi nell’aldilà del sogno e trasformare *“la logica nell’illogicità”*

Wonderland

- un *“luogo popolato di folli matematici”*, *“un mondo mascherato”*,
- Humpty Dumpty e la Lepre Marzolina solo una coppia di professori mascherati *“che si è concessa una vacanza mentale”*

La logica solo un gioco vacuo e cerebrale di artifici e paradossi?



Quanto alla matematica che cosa privilegiare?

- Osservazione o pensiero? *“Esperïenza o arte”*?
- E, all’interno del pensiero, intuizione o rigore?

Un dilemma importante anche nell’insegnamento e nell’apprendimento della matematica sin dalla scuola primaria: come educare a ragionare?

Logica: sì o no? ***Un dibattito appassionato di oltre un secolo fa***… Poincaré contro Hilbert

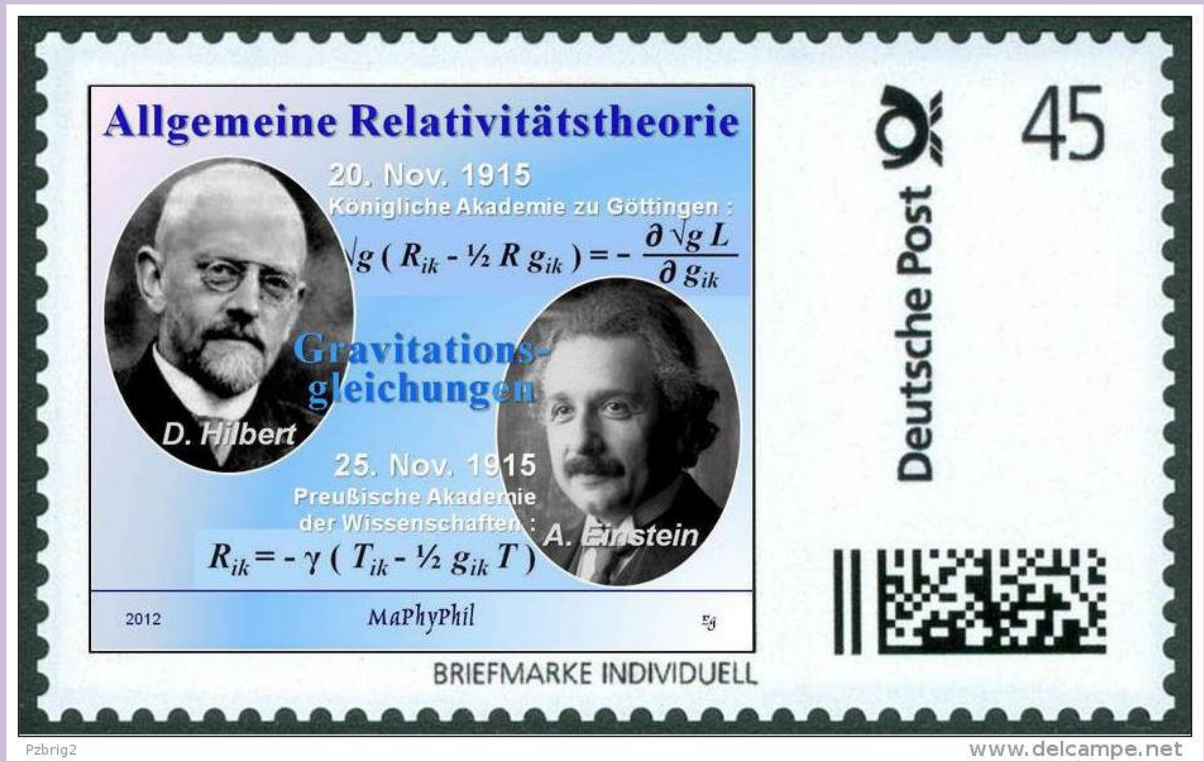
Henri Poincaré, *Scienza e metodo*, 1908

- *“La logica talvolta genera mostri”*
- *“Per parte mia, nella logistica non vedo che intralci all’invenzione.”*
- *“La logica rimane […] sterile, se non è fecondata dall’intuizione.”*
- Il pericolo di ridurre le scienze matematiche a *“un* ***coacervo arbitrario di inutili sottigliezze.****”*

Al contrario

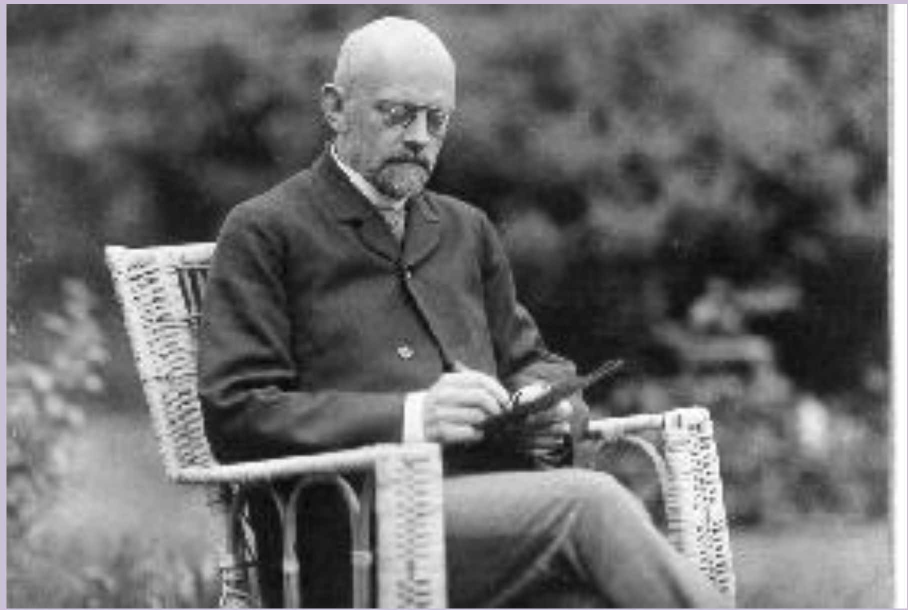
- l’intuizione è indispensabile *“per colmare* ***l’abisso che separa il simbolo dalla realtà****”*
- *“Senza di essa, il matematico sarebbe come uno scrittore che fosse ferrato in grammatica ma mancasse di idee.”*

In tema di didattica: una buona definizione non è quella che *“soddisfa alle regole della logica”* ma *“quella che viene compresa dagli alunni”*.



David Hilbert: la matematica luce e regina delle scienze, *Conoscenza della natura e logica*, 1930

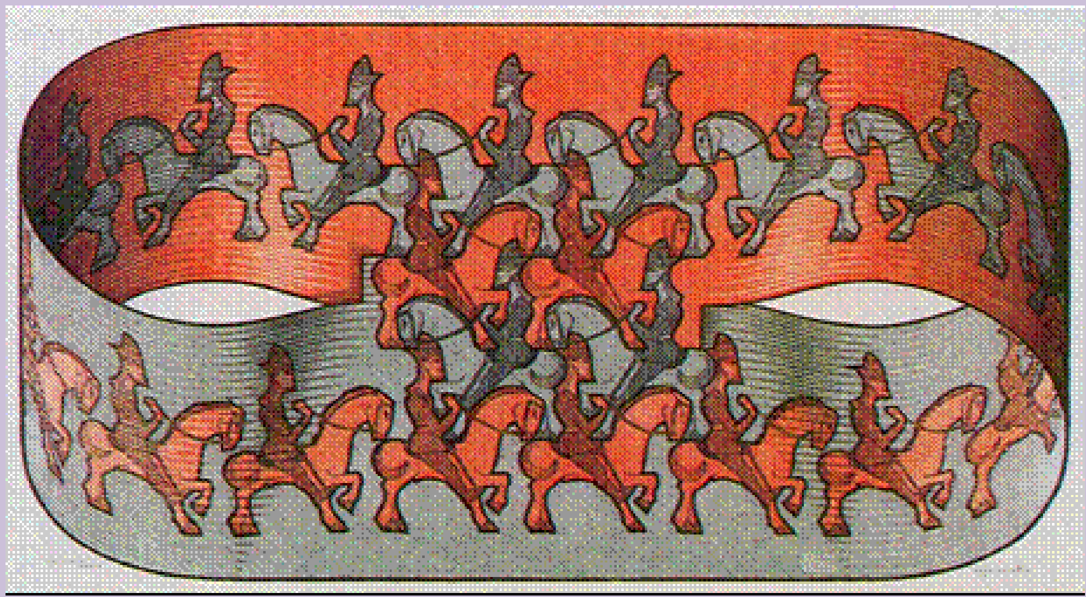
"Noi non riusciamo a dominare una teoria scientifica della natura finché non abbiamo estratto e totalmente disvelato il suo ***nucleo matematico****."*



Problemi matematici, 1900: *“Un campo della conoscenza è vitale finché offre un’abbondanza di problemi; una scarsità di problemi significa la sua morte o la fine del suo sviluppo.”*

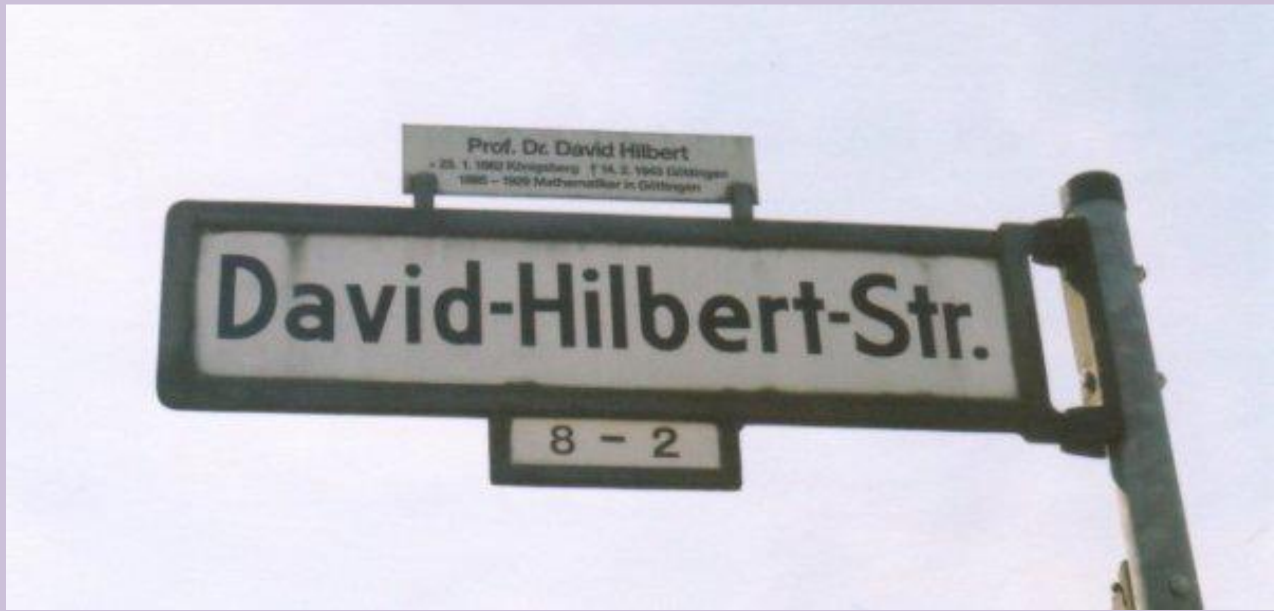
Ma in matematica ci sono problemi

- *“**impostici** dall’astronomia”* e *“necessari per la* conoscenza *dei più semplici e fondamentali fenomeni naturali”*
- oppure frutto della *“**libera invenzione dell’intelletto umano**”*



“Con lo sviluppo di una disciplina matematica […] lo spirito umano […] **emerge in primo piano come il vero e proprio soggetto interrogante***”*.

“Su questo gioco, alterno e sempre rinnovantesi, tra pensiero ed esperienza si basano – mi pare – quelle numerose e sorprendenti analogie, e quella apparente armonia prestabilita, che il matematico percepisce così spesso nelle problematiche, nei metodi e nei concetti dei diversi settori della conoscenza.”



L'importanza del rigore logico: *"Il requisito della deduzione logica mediante un numero* ***finito*** *di inferenze è nient'altro che il requisito del rigore, […] di proverbiale importanza in matematica"*

Attenzione, però:

- il rigore non è *"nemico della semplicità"*
- rigore non significa rigidità.

Tra i motivi del contendere

- il progetto di Frege e Dedekind di *“fondare l’aritmetica sulla pura logica”*,
- l’avvento della teoria dei numeri transfiniti di Georg Cantor (dal 1874 in poi),
- la teoria degli insiemi che li sorregge entrambi.

Hilbert, *Sull'infinito*, 1925-26: *"L'infinito non si trova mai realizzato; esso non è presente in natura, né è ammissibile come fondamento del nostro pensiero razionale"*. Eppure è

- *l'idea che più ha stimolato l'intelletto*,
- *il concetto che più ha bisogno di chiarificazione*.

Hermann Weyl: la matematica è ***"la scienza dell'infinito"***

Ancora Hilbert: la teoria dei numeri transfiniti di Cantor:

- *"il fiore più bello dello spirito umano"*
- *"Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai cacciare".*

Georg Cantor, *Grundlagen* (*Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità*)

Passaggi emozionanti…
"la matematica merita – e lo merita essa sola – il nome di libera, un attributo che, se stesse a me scegliere, io preferirei a quello ormai usuale di «pura» […] ***l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà****."*

… insieme a

- definizione fascinose ma impacciate… (*“Per «molteplicità» o «insieme» intendo […] ogni* ***Molti che si possa pensare come Uno****, ovvero ogni classe composta di elementi determinati che possa essere unita in un tutto da una legge”)*
- … e dilemmi imbarazzanti (il paradosso di Russell).

La necessità di una sistemazione logica

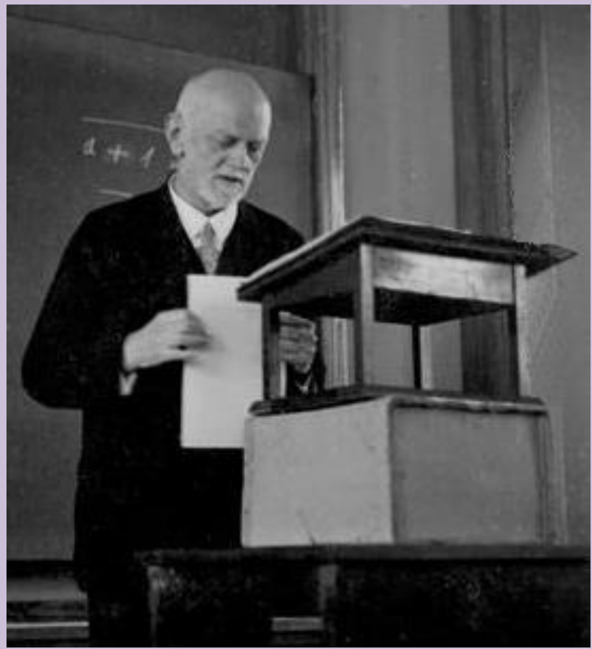
- assiomi
- dimostrazioni.

Hilbert, *Nuova fondazione della matematica*, 1922

“Procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente”

Hilbert, *Problemi della fondazione*

Zermelo, *“interprete congeniale”* di Cantor, stabilisce *“le assunzioni necessarie alla costruzione assiomatica della teoria degli insiemi”* e precisa gli strumenti usati da Cantor in modo indefinito



Hilbert: *“L’operare con l’infinito può venir reso sicuro solo dal finito.”*

Il calcolo aritmetico:

- dalle cifre $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ e da numeri, operazioni e relazioni $+, \cdot, =, \leq$ con conseguenti uguaglianze $2 + 3 = 3 + 2, \dots$
- all’astrazione algebrica, variabili $a, b, \dots$ e leggi generali (***enunciati ideali***) $a + b = b + a$.

Il calcolo logico:

- da proposizioni esplicite (ipotesi, tesi, teoremi) e dal linguaggio matematico comune (e, o, se… allora, non)
- a variabili di proposizioni collegate segni logici astratti &, $\vee, \rightarrow, \neg$ con leggi determinate che esprimono il ragionamento e formalizzano le dimostrazioni.

La teoria della dimostrazione: simbolismo, formalismo, regole di deduzione...

La potenza, il nitore, l’eleganza delle dimostrazioni interviene anche dove (all’infinito) nessuna evidenza può sostenere: matematica e non *“teologia”*.

La realtà superata dall’astrazione

- *punti, rette, piani*

come

- *amore, legge, spazzacamini* (lettera a Frege del 29 dicembre 1899)
- oppure *tavoli, sedie, boccali di birra* (citato da biografie).

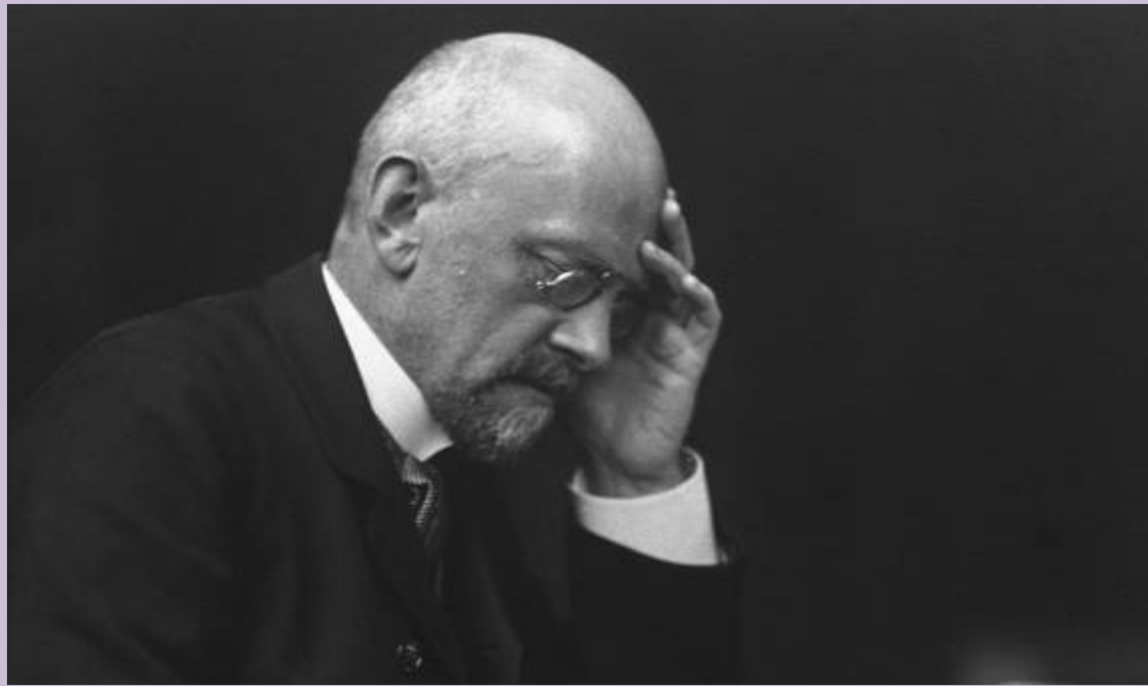
Non ***dimostrabile perché vero***, ma ***vero perché dimostrabile***!
“Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora sono veri […] Questo è per me il criterio della verità e dell’esistenza” (lettera a Frege del 29 dicembre 1899)

Le critiche di Poincaré

"Resta inteso che per dimostrare un teorema non è necessario, e nemmeno utile, sapere ciò che esso vuole dire. Il geometra si potrebbe benissimo sostituire con il «pianoforte logico» di Stanley Jevons; o se si preferisce, si potrebbe ideare una macchina nella quale si introducono da una parte gli assiomi per raccogliere i teoremi all'estremità opposta, come quella leggendaria macchina di Chicago nella quale i maiali entrano vivi per uscirne alla fine trasformati in prosciutti e salsicce. Al pari di tali macchine, il matematico non ha alcun bisogno di capire ciò che sta facendo."

E ancora…

- Contro Cantor e le sue teorie (*Scienza e metodo*): *"Non esiste infinito attuale: i cantoriani lo hanno dimenticato, e sono caduti in contraddizione"*
- L'idra di Lerna
- Contro Zermelo e i suoi assiomi (*Ultimi pensieri*, *La logica e l'infinito)*: *"ha creduto di evitare"* i paradossi emersi in precedenza. ***"Ma se ha chiuso bene il suo ovile, non sono sicuro che non vi abbia rinchiuso dentro anche il lupo."***



Il programma di Hilbert: i requisiti chiave di un buona teoria matematica

La ***coerenza*** – l’assenza autocertificata di paradossi e contraddizioni: *“C’è […] una condizione, una sola ma assolutamente necessaria, alla quale è collegato l’uso del metodo degli elementi ideali, e questa è la dimostrazione della non-contraddittorietà”*

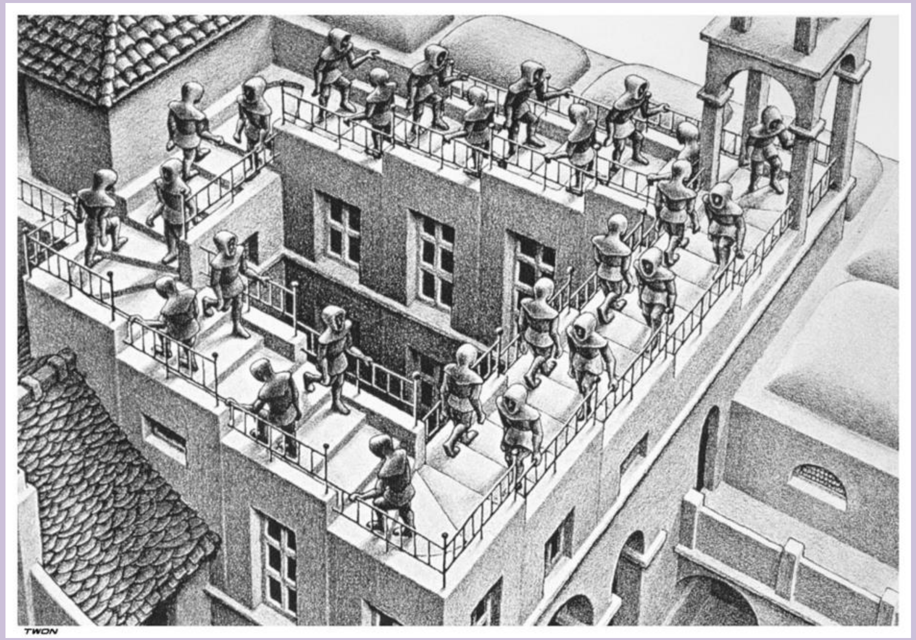
La ***completezza*** – la capacità di far luce su ogni proposizione:

- ***“Noi dobbiamo sapere, noi sapremo”.***
- *“Questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è per noi un potente stimolo durante il lavoro. Dentro di noi udiamo continuamente l’appello: «Ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c’è lo ‘Ignorabimus’ »”*

I teoremi di incompletezza di Gödel. Una teoria matematica *T*

- coerente
- accessibile all'intelletto umano
- capace di trattare un minimo di aritmetica

è forzatamente incompleta (incontra proposizioni sui numeri che non sa né provare né confutare).



Un adattamento del paradosso di Epimenide alla dimostrabilità invece che alla verità: la proposizione metamatematica *“io sono dimostrabile da T”*

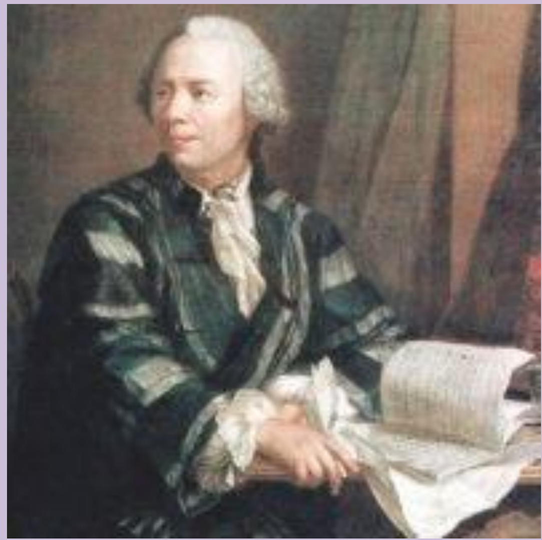
- si riesce a tradurre in aritmetica
- per *T* completa, è dimostrabile se e solo se è indimostrabile.

Solo un artificio? O situazioni analoghe nella matematica genuina?

Il decimo problema di Hilbert H10

Equazioni diofantee: coefficienti interi, alla ricerca di *soluzioni intere*!

Un argomento insidioso…



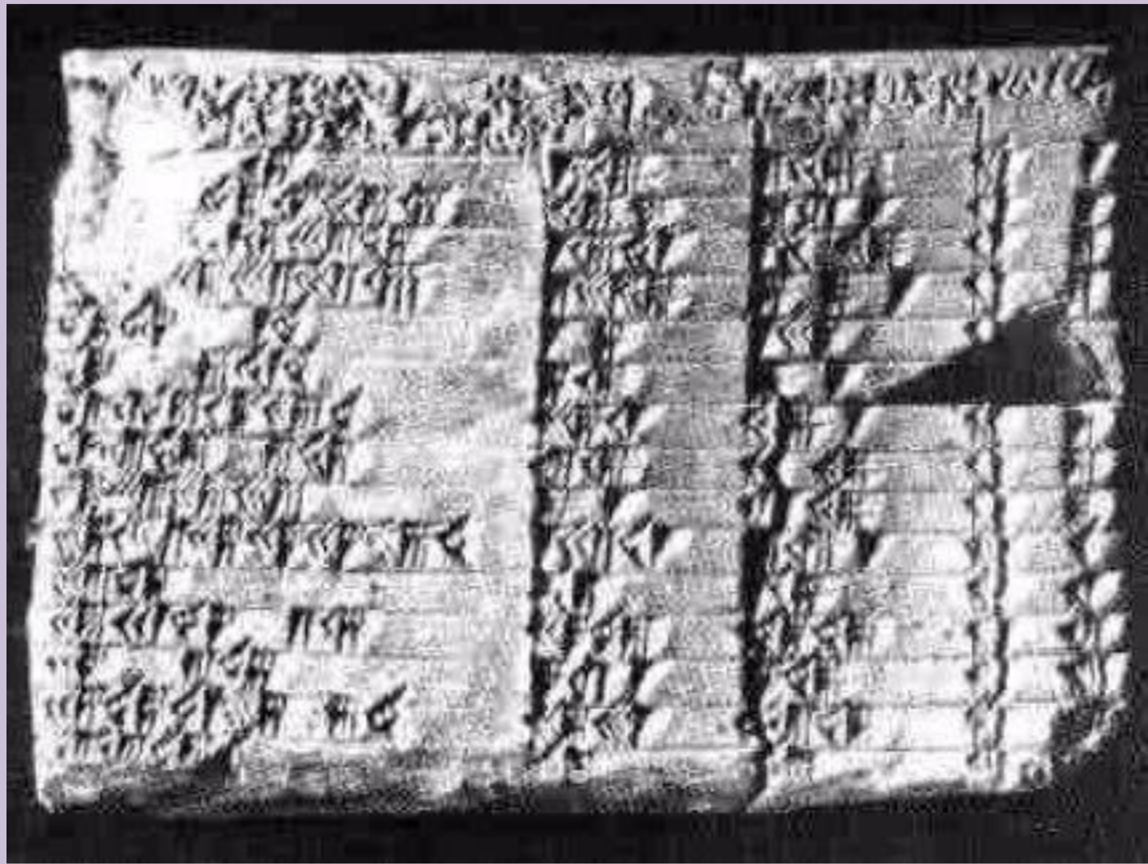
Il problema del mercante di bestiame di Eulero. Un mercante di bestiame ha speso complessivamente a una fiera 1770 talleri per comprare tori e cavalli, 31 talleri per ogni toro e 21 talleri per ogni cavallo. Quanti tori e cavalli ha acquistato?

Semplice! Per $x =$ numero dei tori e $y =$ numero dei cavalli, $31 \cdot x + 21 \cdot y = 1770$, da cui $y = \frac{1770-31\cdot x}{21}$.

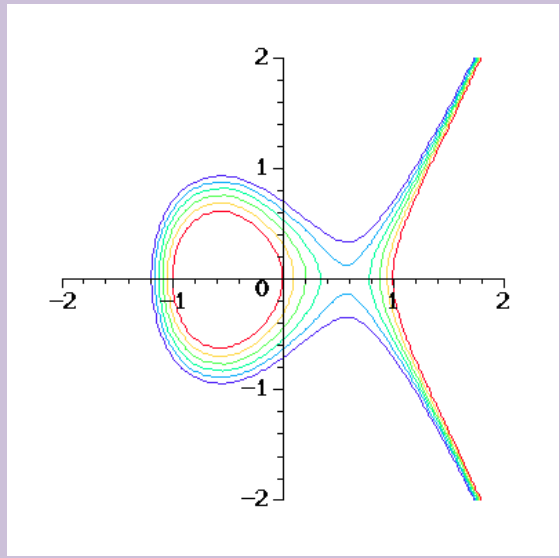
O no? I cavalli non si acquistano in ventunesimi. Servono soluzioni intere non negative.

Altri esempi famosi

- La misteriosa irrazionalità del mondo: $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$ ($\sqrt{2}$ e il numero aureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)
- Anfibi tra l'essere e il non essere: $x^2 + 1 = 0$ (le unità immaginarie $\pm i$),



- L'equazione di Bombelli: $x^3 - 15\,x - 4 = 0$ (verso la soluzione 4 tramite $\sqrt{-121}$),
- Il teorema di Pitagora e le terne pitagoriche $x^2 + y^2 = z^2$,
- L'Ultimo Teorema di Fermat $x^n + y^n = z^n, n \geq 3$.



E ancora…

$$2x + 4 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0, \ \dots$$
$$2x + 5 = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0, \ \dots$$

sono tutte equazioni a coefficienti interi, ma

- quelle della prima riga hanno anche soluzioni intere, rispettivamente – 2, ± 1, (±1, 0) e (0, ±1),
- quelle della seconda riga no.

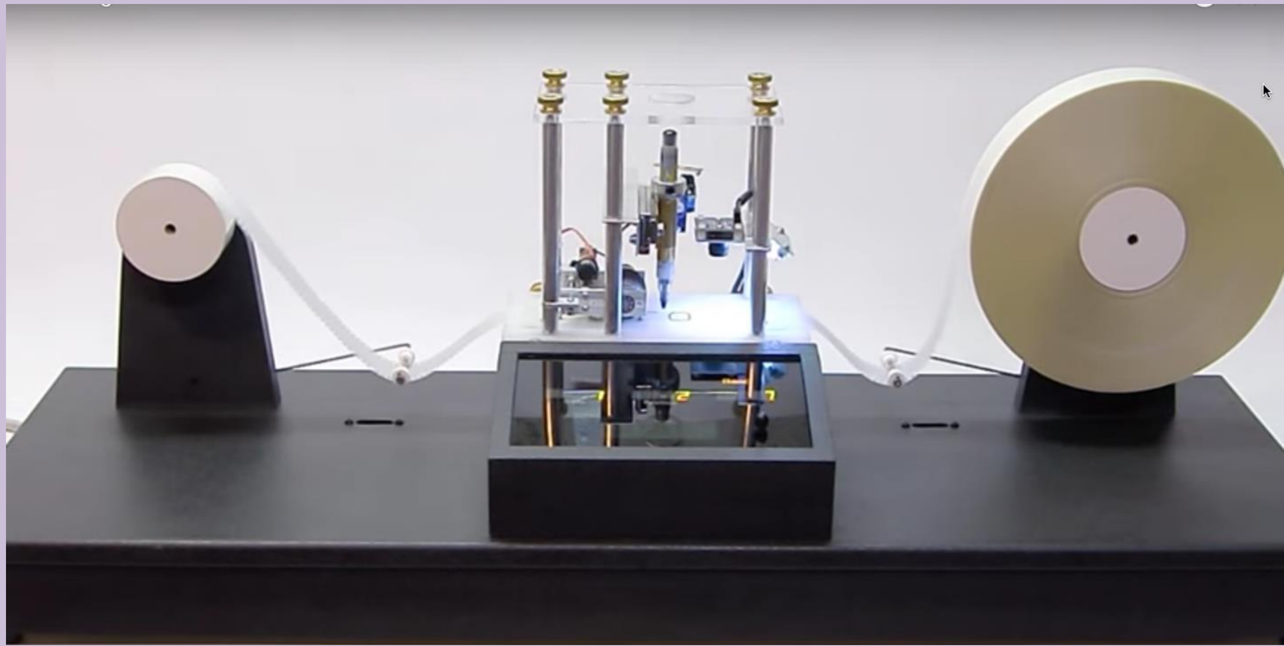
Eppure la differenza tra le prime e le seconde è quasi impalpabile.

H10 (in termini moderni): *determinare un algoritmo che, per ogni polinomio a coefficienti interi (di qualunque grado, in un numero qualunque di incognite), stabilisca se quel polinomio ammette o no radici intere*.

La risposta generale a H10 (M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, Y. Matijasevic, DMPR, 1970): ***nessun algoritmo!***

Un intermezzo logico (1936, Church, Turing) e una risposta ai seguenti interrogativi:

- quali sono i problemi con o senza algoritmo di soluzione,
- che cosa è un calcolatore, o un programma di calcolatore.



Alan Turing, 1936-37: i primi modelli teorici di *programma* e di *calcolatore* (la *macchina di Turing* e la *macchina di Turing universale*, rispettivamente).

La tesi di Church e Turing (1936): è calcolabile esattamente quello che una macchina di Turing sa calcolare.

Ma nessuna macchina di Turing sa risolvere H10…

Gilbert K. Chesterton, *Il poeta e i pazzi*: *“il cerchio è insieme* ***un’eternità e una prigione****.”*

La logica come il cerchio? Eternità ***oppure*** prigione?

- Metamatematica che mortifica e ingabbia l’invenzione?
- Oppure *“matematica applicata alla matematica”* (Saharon Shelah)?